Modélisation d'un moteur continu à balais

Définition des principaux paramètres et variables en régime continu

En régime permanent (i.e. hors régime transitoire), l'état du moteur est défini par les variables principales suivantes :

Vm = tension globale aux bornes du moteur
Im = courant global mesuré aux bornes du moteur
Ω = vitesse angulaire de rotation du moteur (= $2\pi N$ où N est le nombre de tours/seconde)
Cu = couple utile sur l'arbre moteur (hors couple dû au frottement des balais)

On connaît par ailleurs le paramètre résistance ohmique du moteur (R) incluant la résistance des enroulements du moteur et la résistance de contact balais/collecteur.

Phénomènes électriques pris en compte

1) Force contre électromotrice (fcém) développée dans le rotor (induit) du fait de sa rotation dans le flux magnétique du stator (inducteur). La fcém sera notée $V\omega$:

$$V\omega = Kv.\Omega$$

En première approximation, (i.e. lorsqu'on peut négliger les réactions d'induit produites par la modification des flux magnétiques dans le rotor due au courant Im), Kv peut être considéré comme une constante.

S'il s'avére que les réactions d'induit sont à prendre en compte, on pourra écrire :

$$Kv = Kv_0 + Kv_1.Im + Kv_2.Im^2 + \dots$$

Les réactions d'induit affaiblissent Kv et les coefficients Kv_1 et Kv_2 sont négatifs.

Le produit $V\omega.Im$ représente la puissance communiquée au rotor principalement sous forme de couples.

2) Pertes ohmiques, caractérisées par une chute de tension Vr supplémentaire :

$$Vr = R.Im$$

3) Pertes de commutation :

Ces pertes sont dues aux inversions de courant (+Im,-Im) dans chaque section de bobinage (section = spires entre deux lames contiguës du collecteur) lors de son passage devant un balai.

Si l est la self d'une section, l'énergie perdue à chaque passage de lame est :

$$w = ½\, l.Im^2$$

La puissance perdue Pc est proportionnelle à w et au nombre de commutations effectuées par seconde, donc à la vitesse de rotation :

$$Pc = \alpha_c.Im^2.\Omega$$

Ce phénomène peut être pris en compte par une chute de tension supplémentaire (Vc) :

$$Vc = Pc/Im = \alpha_c.Im.\Omega$$

Bilan de puissances électriques :

La puissance totale fournie par l'alimentation aux bornes du moteur peut se répartir ainsi :

$$Vm.Im = (V\omega + Vr + \alpha_c.Im.\Omega).Im$$

Qui conduit à l'équation suivante pour les tensions :

$$\boxed{Vm = Kv.\Omega + R.Im + \alpha_c.Im.\Omega}$$

Couple produit et pertes mécaniques internes

D'après ce qui précède, la puissance électrique absorbée par le rotor et restituée principalement sous forme mécanique vaut :

$$Pm = Vm.Im = Kv.\Omega.Im$$

Le couple moteur global correspondant vaut :

$$Cm = Pm/\Omega = Kv.Im$$

On voit ici que le couple global est simplement proportionnel au courant du moteur.

Pertes dues aux couples parasites internes au moteur :

1) Pertes par hystérésis :

L'hystérésis dans le noyau magnétique de l'induit produit un décalage angulaire entre les lignes de champ magnétique créé par les aimants de l'inducteur et le flux résultant dans l'induit, ce qui génère un couple résistant constant. La perte se manifeste par un échauffement du noyau magnétique.
L'énergie perdue par hystérésis au cours d'un tour de rotor est proportionnelle à la surface de son cycle d'hystérésis pour le flux (constant) créé par l'inducteur. Dans la mesure où les réactions d'induit modifient peu la variation globale de flux dans le rotor (pas de saturation du matériau), la surface du cycle peut être considérée comme constante.

La puissance perdue Ph est alors simplement proportionnelle au nombre de tours par seconde :

$$Ph = \alpha_h.\Omega$$

2) Pertes par frottements « solides » des balais :

Le frottements des balais sur le collecteur sont principalement de type « solides », c'est à dire que le couple produit peut être considéré comme constant (i.e. peu dépendants de la vitesse de rotation).

On peut alors écrire la puissance perdue sous la forme :

$$Ps = Cb.\Omega$$

3) Pertes par frottements « visqueux » :

On peut tenir compte de quelques frottements de type « visqueux » tels que ceux développés dans les paliers et ceux dus aux effets aérodynamiques du rotor (cisaillement de l'air dans l'entrefer, ailettes de ventilation ...). La puissance perdue correspondante est :

$$Pv = Cv.\Omega^2$$

4) Pertes par courants de Foucault dans le noyau :

En rotation, le matériau magnétique du noyau rotor, bien que peu conducteur et fortement feuilleté, est parcouru par de mini boucles de courant, dues aux forces électromotrices engendrées par les variations de flux. Ce phénomène produit un échauffement du noyau par pertes Joule.

La force électromotrice dans une boucle est proportionnelle à la vitesse de variation du flux, c'est à dire à Ω. La puissance perdue par effet Joule est proportionnelles au carré de la tension et donc à Ω^2.
Les pertes peuvent alors s'écrire :

$$Pf = \alpha_f.\Omega^2$$

Bilan des puissances dissipées : La puissance totale perdue est alors (Pd) :

$$Pd = Ph + Ps + Pv + Pf$$

Qu'on peut écrire :

$$Pd = (\alpha_h + Cb).\Omega + (\alpha_f + Cv).\Omega^2$$

On peut regrouper les coefficients homogènes entre eux, ce qui permet d'écrire :

$$Pd = C_0.\Omega + C_1.\Omega^2$$

On en déduit l'expression du couple parasite global :

$$Cp = C_0 + C_1.\Omega$$

L'expression du couple utile disponible sur l'arbre de sortie du moteur est alors :

$$\boxed{Cu = Kv.Im - (C_0 + C_1.\Omega)}$$

Bilan global de puissance

La puissance électrique fournie au moteur est : $Vm.Im$

La puissance mécanique disponible sur l'arbre rotor est : $Cu.\Omega$

D'où le rendement ρ : $\rho = Vm.Im/Cu.\Omega$

L'ensemble des formules précédentes permet de calculer Vm et Cu à partir de la donnée de Im et de Ω, c'est à dire :

$$Vm = Kv.\Omega + R.Im + \alpha_c.Im.\Omega$$

$$Cu = Kv.Im - C_0 - C_1.\Omega$$

Pour cela, il faut déterminer les coefficients Kv, R, α_c, C_0 et C_1

Détermination des coefficients des formules

Les formules font apparaitre les coefficients de façon linéaire ce qui permet de les calculer en relevant un nombre de point de fonctionnement suffisants :

Par exemple, dans le cas de la formule donnant Vm, on devra effectuer au minimum la mesure des 3 valeurs (Vm, Im et Ω) pour 3 régimes de fonctionnement différents, ce qui permettra d'écrire :

$$(\Omega_1).Kv + (Im_1).R + (Im_1.\Omega_1).\alpha_c = (Vm_1)$$
$$(\Omega_2).Kv + (Im_2).R + (Im_2.\Omega_2).\alpha_c = (Vm_2)$$
$$(\Omega_3).Kv + (Im_3).R + (Im_3.\Omega_3).\alpha_c = (Vm_3)$$

On obtient ainsi un système de trois équations linéaires dont les trois coefficients cherchés (Kv, R, α_c) sont les inconnues et qu'on résoudra par les méthodes classiques.
En fait, on utilisera un nombre supérieur de points pour vérifier si les coefficients peuvent bien être considérés comme constants ou si Kv, par exemple, doit être développé suivant les puissances de Im.

<u>Remarque</u> : dans la pratique, le coefficient α_c est parfois trop faible pour être calculé validement au regard des erreurs de mesure commises sur Vm, Im et Ω. On pourra donc parfois négliger α_c.

On procède de même pour l'équation des couples où trois groupes de trois mesures (Im, Ω, Cu) suffisent en principe pour déterminer les coefficients (Kc, C_0, C_1)

$$(Im_1).Kc - (1).C_0 - (\Omega_1).C_1 = (Cu_1)$$
$$(Im_2).Kc - (1).C_0 - (\Omega_2).C_1 = (Cu_2)$$
$$(Im_3).Kc - (1).C_0 - (\Omega_3).C_1 = (Cu_3)$$

<u>Remarque</u> : On a remplacé ici Kv par le coefficient de couple Kc, bien qu'en principe Kv = Kc. En réalité, compte tenu des erreurs de mesures, le second système fournit généralement un Kc différent du Kv déjà calculé. De plus, dans la pratique, on pourra parfois négliger le coefficient C_1.

Application pratique

La méthode précédente, appliquée à un ensemble de mesures, permet d'obtenir un ordre de grandeur satisfaisant des coefficients cherchés. Toutefois, la méthode peut se révéler très sensible aux erreurs de mesure et conduire à une dispersion importante des résultats lorsqu'on l'applique à grand nombre de groupes de mesures.
En tout état de cause, il ne faut pas oublier que les paramètres du moteur évoluent au cours des mesures par suite des échauffements (fonction du courant de mesure) qui modifient les caractéristiques ohmiques et magnétiques. Le modèle ne pourra donc représenter qu'une moyenne relative aux conditions d'essai.
On pourra améliorer la précision du modèle, d'un point de vue statistique, comme suit, à l'aide d'un tableur par exemple :

Pour chaque point de mesure, on forme les 2 différences suivantes :

$$\Delta Vm = Vm - (Kv.\Omega + R.Im + \alpha_c.Im.\Omega)$$
$$\Delta Cm = Kc.Im - (Cu + C_0 + C_1.\Omega)$$

On trace les 4 graphiques suivants (nuages de points) :

ΔVm en fonction de Vm, puis de Im
ΔCm en fonction également de Vm, puis de Im

On ajuste (à la main) les valeurs de Kv, R, α_c d'une part et de Kc, C_0 et C_1 d'autre part pour obtenir les nuages les plus réguliers (sans droite de régression apparente) et de dispersion minimum, en s'efforçant de faire Kv ~ Kc.

Résultats : La méthode, appliquée au moteur de minibee, donne les résultats suivants (avec les unités normalisées) :

Kv = 0,00355 V/(rad/s)	Kc = 0,00355 N.m/A
R = 0,19 Ohm	C_0 = 0,00195 N.m
α_c = $5\ 10^{-5}$ Ohm/(rad/s)	C_1 = $8\ 10^{-7}$ N.m/(rad/s)

Soit, avec les unités utilisées en pratique :

Kv = 0,000372 V/(trs/min)	Kc = 0,355 N.cm/A
α_c = $5{,}24\ 10^{-6}$ Ohm/(trs/min)	C_0 = 0,195 N.cm
	C_1 = $8{,}4\ 10^{-6}$ N.cm/(trs/min)

Les équations pratiques définissant l'état du système sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} Vm = Kv.\Omega + R.Im + \alpha_c.Im.\Omega \\ Cu = Kc.Im - (C_0 + C_1.\Omega) \end{array}}$$

On peut mettre ce système sous d'autres formes, sachant que toute variable peut s'exprimer au moyen de deux, prises parmi les trois autres, au minimum.

Par exemple, on peut exprimer Im en fonction de Cu et de Ω :

$$Im = (Cu + C_0 + C_1.\Omega)/Kc$$

Puis calculer Vm en portant la valeur de Im dans la première équation :

$$Vm = Kv.\Omega + (R + \alpha_c.\Omega).Im$$